المذكرة التأسيسية في الرياضيات

الرياضيات بشكل مختلف

look

إعداد الأستاذ / أحمد محروس

الفرع الأول: الجبر

قواعد الإشارات

(١) حاصل ضرب وخارج قسمة الإشارات المتشابهة دائماً يكون موجباً

مثال: $+ \times + = (+)$ ، $\frac{+}{+} = (+)$

$- \times - = (+)$ ، $\frac{-}{-} = (+)$

$\Leftarrow$ $٣ \times ٢ = ٦$ ، $-٣ \times -٢ = ٦$

$\frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$ ......

(٢) حاصل ضرب وخارج قسمة الإشارات المختلفة دائماً يكون سالباً

مثال: $+ \times - = (-)$ ، $- \times + = (-)$

$\frac{+}{-} = (-)$ ، $\frac{-}{+} = (-)$

$\Leftarrow$ $٣ \times -٢ = -٦$ ، $-٣ \times ٢ = -٦$

$\frac{٣}{-٢} = \frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٢} = \frac{٣}{-٢}$ وهكذا

الأعداد النسبية

(١) هو العدد الذي يمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب $\in$ ص ، ب $\neq$ صفر

(٢) أمثلة على الأعداد النسبية

$\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{-٣}{٨}$ ، ٧ ، صفر ، ٤٣٪

وخلي بالك

جميع الأعداد الصحيحة هي أعداد نسبية أي أن [ص $\subset$ ن]

(٣) يكون $\frac{أ}{ب}$ نسبياً إذا كان

ب $\neq$ صفر

مثال: $\frac{٣}{س-٣}$ $\in$ ن إذا كان س $\neq$ ٣

(٤) الصفر هو العنصر المحايد الجمعي في ن بينما الواحد هو العنصر المحايد الضربي في ن

(٥) المعكوس الجمعي $\Leftarrow$ نغير إشارة العدد فقط

..... أوجد المعكوس الجمعي لكل من :-

$\frac{٢}{٣} \leftarrow \frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣} \leftarrow \frac{٢}{٣}$

$(-١) = ١$ ، صفر $\leftarrow$ صفر ، $١ \leftarrow -١$

(٦) المعكوس الضربي $\leftarrow$ نقلب العدد فقط

...... أوجد المعكوس الضربي :-

$\frac{٢}{٣} \leftarrow \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٣} \leftarrow \frac{-٣}{٢}$

الحدود والمقادير الجبرية

١ الحد الجبري: يتكون من حاصل ضرب عاملين أو أكثر

فمثلاً: ٥ س حد جبري يتكون من

٥ عامل عددي (المعامل) ، س عامل جبري

---

٢ درجة الحد الجبري: هو مجموع أسس العوامل الجبرية دون العددية

فمثلاً:
- ٥ س ← من الدرجة الأولى
- ٢ س^{3} ← من الدرجة الثالثة
- -٣ س^{2} ص^{3} ← من الدرجة الخامسة
- ٧ ← من الدرجة الصفرية

---

٣ المقدار الجبري: يتكون من حدين جبريين أو أكثر ويفصل بينهما + أ -

فمثلاً
- ٢ س + ٣ ص ← مقدار جبري ذي حدين
- ٣ س^{2} + ٥ س ص - ٧ س ← مقدار جبري من ثلاث حدود

---

٤ درجة المقدار الجبري: هو أعلى درجة للحدود المكونة له

فمثلاً:
- ٣ س + ٧ ← من الدرجة الأولى
- ٣ س^{2} + ٥ ص ← من الدرجة الثانية
- ٣ س^{2} + ٤ س^{2} ص - ٧ س ← من الدرجة الثالثة

---

٥ تتشابه الحدود الجبرية إذا تشابهت الرموز والأسس

مثال: [٣ س ، ٢ س ، -٧ س] ، [-٣ س ص^{2} ، ٦ س ص^{2}]

جمع وطرح الحدود الجبرية

أولاً: جمع الحدود الجبرية:

- يفضل استخدام الطريقة الرأسية

مثال: أجمع المقدارين

٣ س - ٥ ص + ٧ ، ٢ ص - ٧ س + ٣

الحل

٣ س - ٥ ص + ٧

⊕ -٧ س + ٢ ص + ٣

-٤ س - ٣ ص + ١٠

ثانياً: طرح الحدود الجبرية:

- يفضل أيضاً استخدام الطريقة الرأسية

مثال: أطرح ٣ س - ٥ ص + ٧ من ٢ ص - ٧ س + ٣

الحل

خلي بالك: اطرح أ من ب تعني ب - أ

٢ ص - ٧ س + ٣

-٥ ص + ٣ س + ٧ (⊕ ⊖ ⊖)

= ٧ ص - ١٠ س - ٤

ضرب الحدود والمقادير الجبرية

أولاً: ضرب حد جبري × حد جبري

- نضرب المعامل في المعامل والرمز في الرمز

مثال:
- ٢ س × -٣ ص = -٦ س ص
- -٣ س^{2} × ٤ س ص = -١٢ س^{3} ص

ثانياً: ضرب حد جبري × مقدار جبري:

• نضرب هذا الحد في كل حد من حدود المقدار [يعني نقوم بالتوزيع]

مثال: • $٣س(٤ص - س) = ١٢ س ص - ٣ س^٢$

• $-٢ س ص (٥ س - ص) = -١٠ س^٢ ص + ٢ س ص^٢$

ثالثاً: ضرب مقدارين جبريين:

(أ) الضرب بوجود النظر

مثال: $(س + ٣)(٢س - ٤) = ...$

الحل

$س(٢س - ٤) + ٣(٢س - ٤)$

$٢س^٢ - ٤س + ٦س - ١٢$

$= ٢س^٢ + ٢س - ١٢$

(ب) مجموع حدين في الفرق بينهما

قاعدة: $(س + أ)(س - أ) = س^٢ - أ^٢$

مثال: $(س + ٢)(س - ٢) = س^٢ - ٤$

• $(س^٢ - ٣)(س^٢ + ٣) = س^٤ - ٩$

(جـ) مربع مقدار ذي حدين

قاعدة: $(س \pm أ)^٢ = س^٢ \pm ٢ أ س + أ^٢$

مثال: • $(س + ٣)^٢ = س^٢ + ٦س + ٩$

• $(س - ٣)^٢ = س^٢ - ٦س + ٩$

• $(٣س - ٢ص)^٢ = ٩س^٢ - ١٢ س ص + ٤ص^٢$

• $(-٣س^٢ - ٣ص)^٢ = ٩س^٤ + ١٨ س^٢ ص + ٩ص^٢$

قسمة الحدود والمقادير

أولاً: قسمة حد جبري على حد جبري

• نقسم المعاملات على المعاملات ونقسم الرموز على الرموز بطرح الأسس

مثال: • $\frac{١٠ س^٣}{٢ س} = ٥ س^٢$

• $\frac{-١٢ أ^٣ ب^٢}{٤ أ ب} = -٣ أ^٢ ب$

ثانياً: قسمة مقدار على حد جبري

• نقسم كل حد من حدود هذا المقدار على هذا الحد مع مراعاة قواعد الأسس

مثال: • $\frac{٦ س^٣ + ٣ س^٢ - س}{٣ س} = ٢ س^٢ + س - \frac{١}{٣}$

ثالثاً: قسمة مقدار على مقدار جبري

• نتبع الخطوات الآتية:

مثال: أوجد خارج قسمة $س + س^٢ - ١٢$ على $٤ + س$

الحل

لاحظ: لازم ترتب الحدود أولاً

$س^٢ + س - ١٢ \div (س + ٤)$ ، خارج القسمة: $س - ٣$

$\ominus س^٢ \ominus ٤س$

$- ٣س - ١٢$

$\oplus ٣س \oplus ١٢$

صفر صفر

∴ خارج قسمة $(س^٢ + س - ١٢)$ على $(س + ٤)$ هو $س - ٣$

الأعداد الحقيقية 2

خلي بالك من الكلام ده :

- $ح = ن \cup ن' = ح_{+} \cup ح_{-} \cup \{صفر\}$
- $ح - ن = ن'$ • $ن \cap ن' = \emptyset$
- $ح_{+} \cap ح_{-} = \emptyset$ • $ح^{*} = ح - \{صفر\}$.

الفترات

- مفتوحة: $]أ ، ب[$ (أ أصغر ، ب أكبر)
- مغلقة: $[أ ، ب]$
- شبه وشبه: $[أ ، ب[$ أو $]أ ، ب]$

(أ) الفترة المفتوحة

فمثلاً $]٢ ، ٥[$ مثلها (على خط الأعداد من $-\infty$ إلى ∞ بدائرتين مفرغتين عند ٢ و ٥)

(ب) الفترة المغلقة

فمثلاً $[٢ ، ٥]$ مثلها (على خط الأعداد بدائرتين مظللتين عند ٢ و ٥)

(ج) شبه مفتوحة أو شبه مغلقة

فمثلاً $[٢ ، ٥[$ مثلها

فمثلاً $]٢ ، ٥]$ مثلها

العمليات على الجذور التربيعية وتكعيبية

أولاً: الجذور التربيعية:

1. $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$
2. $\dfrac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\dfrac{أ}{ب}}$
3. $\dfrac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \dfrac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} \times \dfrac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ب}} = \dfrac{\sqrt{أب}}{ب}$

ثانياً: الجذور التكعيبية

1. $\sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{ب} = \sqrt[٣]{أب}$
2. $\dfrac{\sqrt[٣]{أ}}{\sqrt[٣]{ب}} = \sqrt[٣]{\dfrac{أ}{ب}}$.

تمارين على الكلام ده

مثال: $\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$

الحل

$= \sqrt{١٦ \times ٢} - \sqrt{٣٦ \times ٢} + \sqrt{\frac{١}{٢} \times ٣٦}$

$= ٤\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} + \sqrt{٩ \times ٢}$

$= ٤\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} = \boxed{\sqrt{٢}}$

مثال: $\sqrt[٣]{٧٢} + \sqrt[٣]{\frac{١}{٣}} + \sqrt[٣]{-٩}$

الحل

$= \sqrt[٣]{٨ \times ٩} + \sqrt[٣]{\frac{١}{٣} \times \frac{٩}{٩}} - \sqrt[٣]{٩}$

$= ٢\sqrt[٣]{٩} + \frac{١}{٣}\sqrt[٣]{٩} - \sqrt[٣]{٩} = \boxed{\frac{٤}{٣}\sqrt[٣]{٩}}$

مثال: $٥\sqrt{٢}\left(٢\sqrt{٢} + \sqrt{١٢}\right)$

الحل

$= ١٠\sqrt{٤} + ٥\sqrt{٢٤}$

$= ١٠\sqrt{٢ \times ٢} + ٥\sqrt{٦ \times ٤}$

$= \boxed{٢٠ + ١٠\sqrt{٦}}$

المعادلات

أولاً: معادلة الدرجة الأولى

تعريف: معنى حل معادلة من الدرجة الأولى في ع هو إيجاد العدد الحقيقي « المتغير » الذي يحقق المعادلة.

خطوات الحل (أو بدون)

مثال: $س + ٢ = ٨$

الحل

∵ $س + ٢ = ٨$

∴ $س = ٨ - ٢$ ⟸ $س = ٦$

∴ $م.ح = \{٦\}$

مثال: $٢س + ٦ = -١٤$

الحل

∵ $٢س + ٦ = -١٤$

∴ $٢س = -١٤ - ٦$

∴ $٢س = -٢٠$ ⟸ $س = -١٠$

∴ $م.ح = \{-١٠\}$

مثال: $\sqrt{٥}\, س - ١ = ٤$

الحل

∵ $\sqrt{٥}\, س - ١ = ٤$

∴ $\sqrt{٥}\, س = ٤ + ١$

$\sqrt{٥}\, س = ٥$ (÷ $\sqrt{٥}$)

$س = \frac{٥}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥\sqrt{٥}}{٥} = \sqrt{٥}$

$م.ح = \{\sqrt{٥}\}$

مثال: $\frac{٥}{س} - ٢ = ٣$

الحل

∵ $\frac{٥}{س} - ٢ = ٣$

∴ $\frac{٥}{س} = ٥$ (× س)

∴ $٥ = ٥س$ (÷ ٥)

$س = ١$

∴ $م.ح = \{١\}$

ثانياً: حل معادلة الدرجة الثانية

• معادلة الدرجة الثانية على الصورة $[أ س^٢ + ب س + جـ = صفر]$

حيث أ ← معامل $س^٢$

ب ← معامل س

جـ ← الحد المطلق

...... طرق الحل ......

(١) الطريقة الجبرية: تحليل - قانون عام

(٢) الطريقة البيانية: نقط تقاطع المنحنى مع محور س

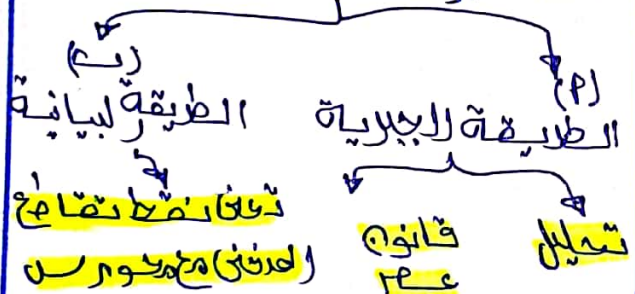
(أ) الطريقة الجبرية

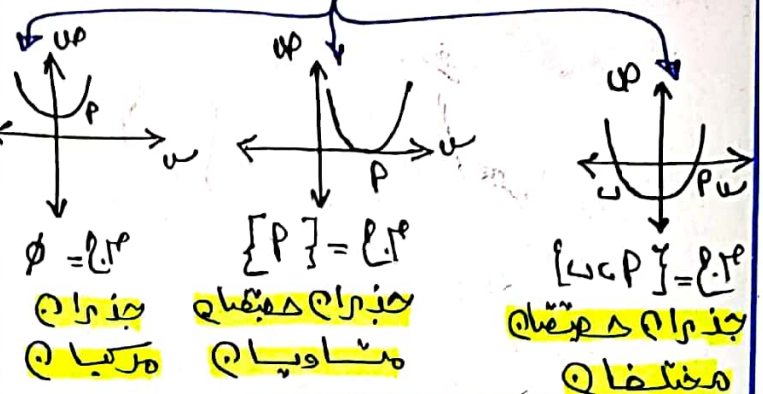
• إما باستخدام التحليل أو القانون العام عندما يصعب تحليل المعادلة

مثال: $س^٢ - ٢س - ٤ = صفر$

الحل

يصعب تحليلها $(س - ٢)(س - ٢) = ٠$ الكلام دا غلط

وهذه المعادلة يصعب تحليلها لذلك نلجأ للقانون العام.

ب) الطريقة البيانية

• لتحديد مجموعة حل المعادلة التربيعية بيانياً [هندسياً] نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

..... وهناك ثلاث حالات .....

- م.ح = {ل، م} جذران حقيقيان مختلفان
- م.ح = {ل} جذران حقيقيان متساويان
- م.ح = $\emptyset$ جذران مركبان

طريقة الحل

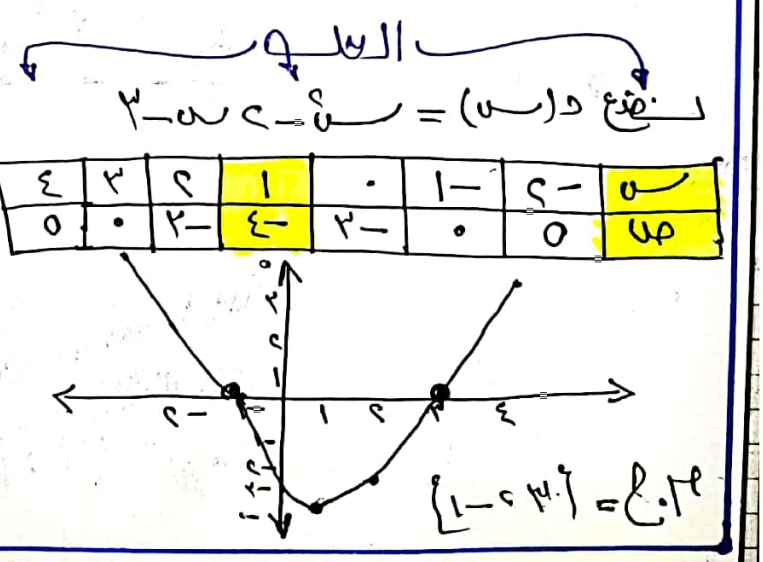
- إما يعطى فترة: نكون جدول ببداية ونهاية هذه الفترة
- أو لا يعطى فترة: نوجد رأس المنحنى وهو $\left(\frac{-ب}{2أ} ، د\left(\frac{-ب}{2أ}\right)\right)$

مثال: ارسم $س^2 - 2س - 3$ مستوياً بالفترة $[-2 ، 4]$

الحل

نضع $د(س) = س^2 - 2س - 3$

س	-2	-1	0	1	2	3	4
ص	5	0	-3	-4	-3	0	5

م.ح = {3 ، -1}

ملاحظات هامة على ....المعادلة التربيعية....

أولاً: العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية

- مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$
- حاصل ضربهما $= \frac{جـ}{أ}$

لاحظ:

(1) إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر فإن ← $ب = 0$

(2) إذا كان أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر فإن ← $جـ = أ$

مثال: أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذور الآتية:

[1] $2س^2 + 5س - 4 = صفر$

الحل

• مجموع الجذرين $= \frac{-5}{2}$

• حاصل ضربهما $= \frac{-4}{2} = -2$

ثانياً: تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

• إذا كان الجذران هما ل ، م فإن المعادلة تكون على الصورة

$$س^2 - (ل + م)س + ل م = صفر$$

مثال: كون المعادلة التي جذراها 2 ، 3

الحل

$س^2 - 5س + 6 = صفر$

* متطابقات هامة عند حل المسائل

1. $\text{ل}^2 + \text{م}^2 = (\text{ل}+\text{م})^2 - 2\,\text{ل}\,\text{م}$
2. $\text{ل}^3 + \text{م}^3 = (\text{ل}+\text{م})\left[(\text{ل}+\text{م})^2 - 3\,\text{ل}\,\text{م}\right]$
3. $\frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}+\text{م}}{\text{ل}\,\text{م}}$
4. $\frac{\text{ل}}{\text{م}} + \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}^2+\text{م}^2}{\text{ل}\,\text{م}} = \frac{(\text{ل}+\text{م})^2 - 2\,\text{ل}\,\text{م}}{\text{ل}\,\text{م}}$
5. $(\text{ل}-\text{م})^2 = (\text{ل}+\text{م})^2 - 4\,\text{ل}\,\text{م}$

مثال: إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة $\text{س}^2 - 3\text{س} + 1 = \text{صفر}$ ، كون المعادلة التي جذراها $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$

الحل

من المعادلة المعطاة

$\text{ل}+\text{م} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \boxed{3}$ ، $\text{ل}\,\text{م} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \boxed{1}$

من المعادلة المطلوبة

• مجموع الجذرين $= \frac{\text{ل}}{\text{م}} + \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{(\text{ل}+\text{م})^2 - 2\,\text{ل}\,\text{م}}{\text{ل}\,\text{م}} = \frac{(3)^2 - 2\times 1}{1} = 7$

• حاصل ضربهم $= \frac{\text{ل}}{\text{م}} \times \frac{\text{م}}{\text{ل}} = 1$

∴ المعادلة المطلوبة هي

$$\text{س}^2 - 7\text{س} + 1 = \text{صفر}$$

ثالثاً: تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

لنوجد المميز $\text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ}$

وهناك ثلاث حالات

- المميز > 0 : يكون الجذران حقيقيان مختلفان
- المميز = 0 : يكون الجذران حقيقيان متساويان
- المميز < 0 : يكون الجذران مركبان وغير حقيقيان

مثال: حدد نوع الجذرين للمعادلات الآتية:

1. $\text{س}^2 - 2\text{س} - 4 = \text{صفر}$

الحل

المميز $\text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ} = (-2)^2 - 4\times 1\times -4 = 20 > \text{صفر}$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان

2. $\text{س}^2 + 4\text{س} + 4 = \text{صفر}$

الحل

المميز $\text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ} = (4)^2 - 4\times 1\times 4 = \text{صفر}$

∴ الجذران حقيقيان متساويان

3. $\text{س}^2 + 2 = \text{صفر}$

الحل

المميز $\text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ} = (\text{صفر})^2 - 4\times 1\times 2 = -8 < \text{صفر}$

∴ الجذران مركبان وغير حقيقيان

الرياضيات علم وفن

قواعد التحليل

أولاً: التحليل بإخراج العامل المشترك

أب + أجـ = أ(ب + جـ)

مثال • ٦س^{2}ص + ١٠س ص^2 = ٢س ص (٣س + ٥ص)

مثال • ٢أ(س + ص) − ب(س + ص) = (س + ص)(٢أ − ب).

ثانياً: تحليل فرق مربعين:

أ^2 − ب^2 = (أ + ب)(أ − ب)

مثال • س^2 − ٩ = (س + ٣)(س − ٣)

• ١٦س^4 − ٨١ = (٤س^2 + ٩)(٤س^2 − ٩)

• (س + ٣)^2 − ٤ = ((س + ٣) + ٢)((س + ٣) − ٢)

= (س + ٥)(س + ١)

ثالثاً: مجموع وفرق مكعبين:

• أ^3 + ب^3 = (أ + ب)(أ^2 − أب + ب^2)

• أ^3 − ب^3 = (أ − ب)(أ^2 + أب + ب^2)

مثال • س^3 + ٨ = (س + ٢)(س^2 − ٢س + ٤)

• س^3 − ٢٧ = (س − ٣)(س^2 + ٣س + ٩)

• ٣س^{4}ص − ٨١س ص^4

الحل

= ٣س ص (س^3 − ٢٧ص^3)

= ٣س ص (س − ٣ص)(س^2 + ٣س ص + ٩ص^2)

رابعاً: تحليل المقدار الثلاثي البسيط س^2 + ب س + جـ

قاعدة • الحد الأكبر يأخذ إشارة الأوسط

• والحد الأصغر يأخذ حاصل ضرب الإشارتين. ويمكن استخدام الآلة الحاسبة

مثال • س^2 + ٧س + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤)

• س^2 + س − ١٢ = (س + ٤)(س − ٣)

خامساً: المقدار الثلاثي غير البسيط أس^2 + ب س + جـ

• نستخدم طريقة المقص (جرب) ويمكن استخدام الآلة الحاسبة

مثال ٦س^2 + ٧س + ٢

الحل

٢س ، ١

٣س ، ٢

= (٢س + ١)(٣س + ٢)

مثال ٣٦س^3 − ٨٤س^2 − ١٥س

الحل

= ٣س(١٢س^2 − ٢٨س − ٥)

= ٣س(٦س + ١)(٢س − ٥)

سادساً: تحليل المقدار الثلاثي المربع الكامل (ح.م)

كيف نعرف أن المقدار الذي أمامنا مربع كامل:-

1. الحد الأول: مربع كامل وإشارته +
2. الحد الأخير: مربع كامل وإشارته +
3. الحد الأوسط = ± 2 × √الأول × √الثالث

مثال: $س^2 + 10س + 25 = (س + 5)^2$

مثال: $4س^2 - 20س + 25 = (2س - 5)^2$

لاحظ الفرق جيداً: حلل

$9س^4 - 12س^2ص^2 + 4ص^4$

الحل: ده مربع كامل

$(3س^2 - 2ص^2)^2$

$9س^4 - 13س^2ص^2 + 4ص^4$

الحل: ده مقدار ثلاثي غير بسيط

$(9س^2 - 4ص^2)(س^2 - ص^2)$

سابعاً: التحليل بالتقسيم

- عبارة عن مقدار مكون من أربعة حدود والحل بإحدى أشهر الطريقتين

أ) نقسم المقدار إلى مقدارين كل منهما يتكون من حدين.

ب) نقسمه إلى مقدار مربع كامل مكون من ثلاث حدود ولحد آخر

مثال: $أس + أص + بس + بص$

الحل

$أ(س + ص) + ب(س + ص)$

$(س + ص)(أ + ب)$

مثال: $س^2 - 2سص + ص^2 - 9$

الحل

$(س^2 - 2سص + ص^2) - 9$ (مربع كامل)

$= (س - ص)^2 - 9$

$= (س - ص - 3)(س - ص + 3)$

تمارين مشهورة على التحليل

1) $3س^3 + 2س^2 + 12س + 8$

الحل

$(3س^3 + 2س^2) + (12س + 8)$

$= س^2(3س + 2) + 4(3س + 2)$

$= (3س + 2)(س^2 + 4)$

2) $س^4 - 5س^2 - 24$

الحل

خلي بالك: أس الحد الأوسط = نصف أس الحد الأول يبقى ده تحليل

$(س^2 - 8)(س^2 + 3)$

3) $س^6 - 64ص^6$

الحل

$= (س^3 - 8ص^3)(س^3 + 8ص^3)$

$= (س - 2ص)(س^2 + 2سص + 4ص^2) \times (س + 2ص)(س^2 - 2سص + 4ص^2)$

حاصل الضرب الديكارتي

أولاً: تساوي زوجين مرتبين

إذا كان $(أ ، ب) = (س ، ص)$

فإن $أ = س$ ، $ب = ص$

مثال: إذا كان $(س^٥ ، ٨) = (٣٢ ، ص^٣)$

فإن $س = ...$ ، $ص = ...$

الحل

$س^٥ = ٣٢$ | $ص^٣ = ٨$

$س^٥ = ٢^٥$ | $ص^٣ = ٢^٣$

$س = ٢$ | $ص = ٢$

في المثال السابق

$ن(س) =$ عدد عناصر س $= ٢$

$ن(ص) =$ عدد عناصر ص $= ٣$

$ن(س × ص) = ن(ص × س) = ٢ × ٣ = ٦$

التمثيل البياني لـ س × ص مثلاً

خلي بالك: $س × \varnothing = \varnothing × س = \varnothing$

ثانياً: حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين

إذا كان $س = \{١ ، ٢\}$ ، $ص = \{٥ ، ٧ ، ٨\}$

فإن

$س × ص = \{١ ، ٢\} × \{٥ ، ٧ ، ٨\}$

$= \{(١ ، ٥) ، (١ ، ٧) ، (١ ، ٨) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٢ ، ٨)\}$

ولكن

$ص × س = \{٥ ، ٧ ، ٨\} × \{١ ، ٢\}$

$= \{(٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٧ ، ١) ، (٧ ، ٢) ، (٨ ، ١) ، (٨ ، ٢)\}$

نتيجة: $س × ص \neq ص × س$

ولكن $ن(س × ص) = ن(ص × س)$

الدوال

أولاً: متى تكون العلاقة دالة:-

(أ) لو أعطى منطط سهمي:-

هنا العلاقة تعتبر دالة إذا خرج سهم واحد فقط من كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى

دالة | ليست دالة

المجال = س = $\{٢ ، ٣ ، ٤\}$ | مجال = ✗✗

مجال مقابل = ص = $\{٥ ، ١\}$ | مقابل = ✗✗

المدى = $\{٥ ، ١\}$ | مدى = ✗✗

المدى هو مجموعة جزئية من ص

(ب) لو أعطى بيان العلاقة ع :-

هنا العلاقة تعتبر دالة **إذا ظهر كل عنصر كمسقط أول مرة واحدة**

مثال: بين أياً مما يلي دالة أم لا ؟

1. بيان ع = {(1، 2)، (3، 5)، (4، 6)}

الحل: تعتبر دالة لأن كل عنصر من س ظهر كمسقط أول مرة واحدة [أي لا يتكرر]

2. بيان ع = {(1، 2)، (3، 5)، (1، 6)}

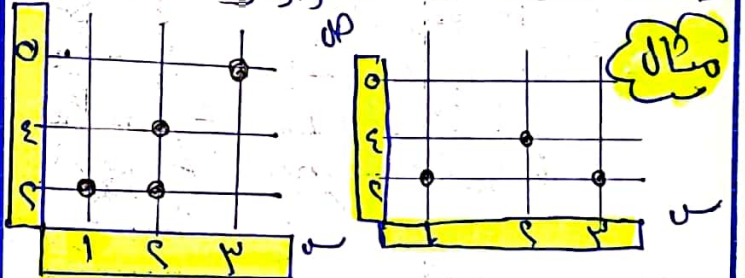
الحل: ليست دالة لأن العنصر 1 ظهر أكثر من مرة كمسقط أول.

(جـ) لو أعطى مخطط بياني :-

هنا العلاقة تعتبر دالة لو كان كل عنصر على المحور الأفقي له صورة واحدة فقط على المحور الرأسي

مثال:

[دالة] [ليست دالة]

لأن العنصر 2 له أكثر من صورة في ص.

(د) لو أعطى علاقة مكتوبة :-

- دالة لو أس ص فردي
- ليست دالة لو أس ص زوجي

مثال

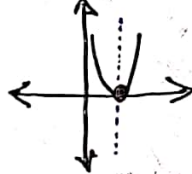
- $ص = س^2 - 4$ ← دالة
- $ص^3 = 5س$ ← دالة
- $ص^4 = 2س + 3$ ← ليست دالة
- $س ص = 8$ ← دالة

خلي بالك

$ص = 5$	$س = 5$
دالة ثابتة.	ليست دالة

(هـ) لو أعطى رسم بياني العلاقة

- نقوم باختبار الخط الرأسي

لو قطع المنحنى في نقطة واحدة تعتبر دالة	لو قطع المنحنى في أكثر من نقطة لا تعتبر دالة
[دالة]	[ليست دالة]

ثانياً: أنواع الدوال

كثيرة حدود – كسرية – جذرية – أسية – لوغاريتم

(أ) دوال كثيرة حدود

ثابتة	خطية	تربيعية
د(س) = أ	د(س) = أس + ب	د(س) = أس² + ب س + جـ

مجالهم دائماً = ح

ثالثاً: مجال الدوال

(١) دوال كثيرات الحدود

مجالها دائماً ح ما لم يذكر خلاف ذلك

مثال

- $د(س) = ٥$ مجالها ← ح
- $د(س) = س^{٣} - ٤س + ٣$ مجالها ← ح
- اذا كان $د: ح^{+} \leftarrow ح$ حيث $د(س) = س + ٣$ مجالها $ح^{+}$ وليس ح
- إذا كانت $د(س) = س^{٣} + ٣$ حيث $س \in [٢، ٣]$ مجالها $[٢، ٣]$ وليس ح.

(٢) الدالة الكسرية

هي دالة تحتوي على متغير في المقام

فمثلاً $د(س) = \frac{٥}{س+٣}$ ، $د(س) = \frac{٢س-١}{س^{٢}-٤}$

بينما $د(س) = \frac{س+٣}{٥}$ ليست دالة كسرية لأنها كثيرة حدود مجالها ح

(*) مجال الكسر = ح − {أصفار المقام}

مثال أوجد مجال ما يأتي

$د(س) = \frac{٥}{س+٣}$

الحل

نضع $س + ٣ = ٠ \leftarrow س = -٣$ المجال ح − {−٣}

مثال $د(س) = \frac{س-٢}{س^{٢}-٤}$

الحل

نضع $س^{٢} - ٤ = صفر$

$س^{٢} = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

∴ مجال د = ح − {±٢}

خلي بالك

- مجال $د(س) = \frac{س+٢}{٥}$ هو ح
- مجال $د(س) = \frac{س+٣}{س^{٢}+٤}$ هو ح

(٣) الدالة الجذرية

(أ) مجال الجذر الذي دليله فردي دائماً هو ح بشرط وجوده في البسط

مثال مجال $د(س) = \sqrt[٥]{س+٢}$ هو ح

مثال مجال $د(س) = \frac{٣}{\sqrt[٥]{س+٢}}$ هو ح − {−٢}

(ب) مجال الجذر لو كان الدليل زوجي

- لو في البسط: ما تحت الجذر ≥ ٠
- لو في المقام: ما تحت الجذر > ٠

مثال مجال $د(س) = \sqrt{س-٤}$

الحل

نضع $س - ٤ \geq صفر$

$س \geq ٤$

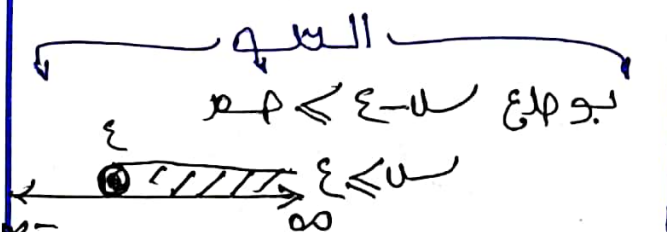
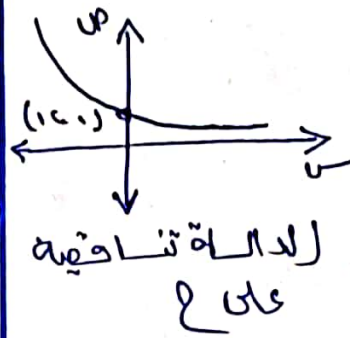
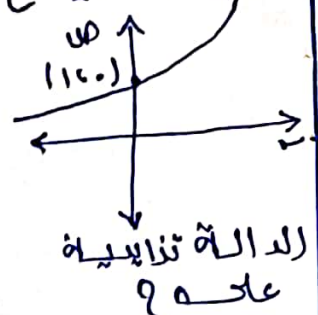
المجال $[٤، \infty[$

④ مجال الدالة الأسية

الدالة الأسية هي د(س) = أ^س

مجالها = ح

مداها = ح+

الدالة تزايدية على ح: أ > ١

الدالة تناقصية على ح: ٠ < أ < ١

(٠، ١)

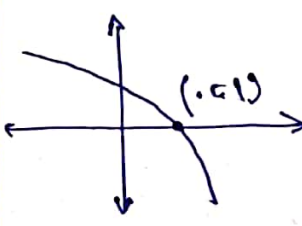
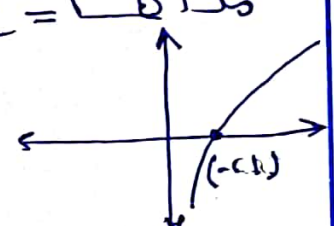
⑤ مجال الدالة اللوغاريتمية

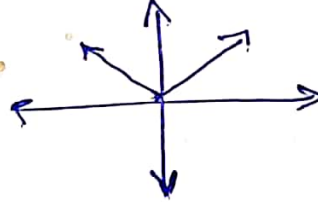
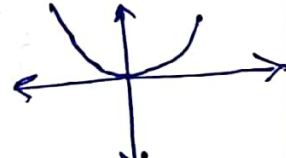
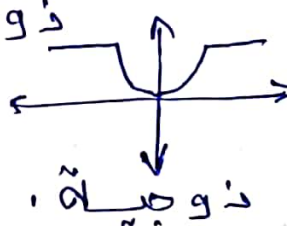
الدالة اللوغاريتمية هي د(س) = لو_أ س

مجالها = ح+

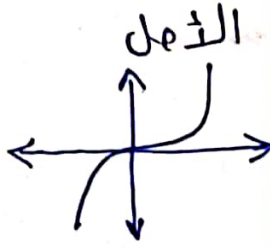
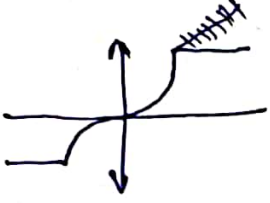
مداها = ح

أ > ١ ، (١، ٠)

٠ < أ < ١ ، (١، ٠)

رابعاً: الدالة الزوجية والفردية

بيانياً: يقال للدالة أنها زوجية إذا كانت متماثلة حول محور الصادات.

زوجية ، زوجية ، زوجية

• يقال للدالة أنها فردية إذا كانت متماثلة حول نقطة الأصل

جبرياً:

• تكون الدالة زوجية لو كانت

د(-س) = د(س)

• تكون الدالة فردية لو كانت

د(-س) = - د(س)

• تكون الدالة ليست زوجية وليست فردية

د(-س) ≠ د(س) ≠ - د(س)

ملاحظات هامة

١) (-س)^ن

لو كان ن زوجي: (-س)^ن = س^ن

لو كان ن فردي: (-س)^ن = -(س)^ن

فمثلاً: (-س)^٤ = س^٤ ، (-س)^٥ = -س^٥

٢) جتا(-س) = جتا س

ظا(-س) = - ظا س

جا(-س) = - جا س

٣) لو كانت الفترة غير متماثلة كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية

]-٥، ٥] ، [-٥، ٥[......

أما لو متماثلة فنبحث نوعها عادي

مثال: ابحث نوع الدوال من حيث كونها زوجية أم فردية أم ليست ولست

(1) $د(س) = س^4 - 3س^2 + 5$

الحل

$د(-س) = (-س)^4 - 3(-س)^2 + 5$

$= س^4 - 3س^2 + 5$

$\therefore د(-س) = د(س)$

$\therefore$ الدالة زوجية

(2) $د(س) = س^3 - ظاس$

الحل

$د(-س) = (-س)^3 - ظا(-س)$

$د(-س) = -س^3 + ظاس$

$د(-س) = -(س^3 - ظاس)$

$\therefore د(-س) = -د(س)$

$\therefore$ الدالة فردية.

(3) $د(س) = \frac{س + جتاس}{س + س^2}$

الحل

$د(-س) = \frac{(-س) + جتا(-س)}{(-س) + (-س)^2}$

$د(-س) = \frac{-س + جتاس}{-س + س^2}$

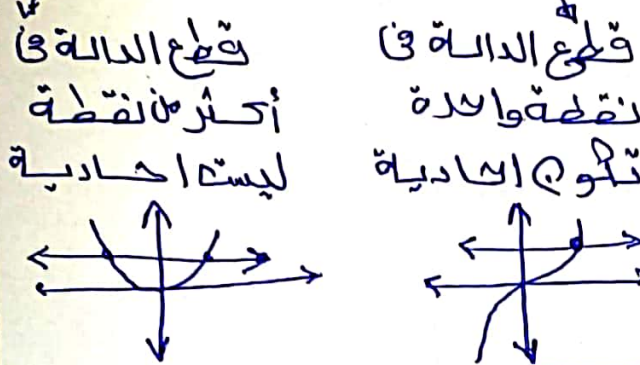
$د(-س) = \frac{-(س - جتاس)}{-(س - س^2)}$

$\therefore د(-س) \neq د(س) \neq -د(س)$

$\therefore$ الدالة ليست زوجية وليست فردية

خامساً: الدالة الأحادية

بيانياً: عن طريق اختبار الخط الأفقي لو...

- قطع الدالة في نقطة واحدة تكون احادية
- قطع الدالة في أكثر من نقطة ليست احادية

لاحظ: كل الدوال الزوجية ليست آحادية بينما كل الدوال الفردية دوال آحادية.

جبرياً:

- نفرض أن أ، ب $\in$ مجال د
- نوجد $د(أ) = د(ب)$

- لو كانت $أ = ب$ فهي آحادية
- لو كانت $أ \neq ب$ فهي ليست احادية

مثال: أثبت أن الدالة آحادية حيث $د(س) = \frac{1}{2س + 3}$

الحل

- نفرض أن أ، ب $\in$ مجال د
- نضع $د(أ) = د(ب)$

$\therefore \frac{1}{2أ + 3} = \frac{1}{2ب + 3}$

$\therefore 2أ + 3 = 2ب + 3$

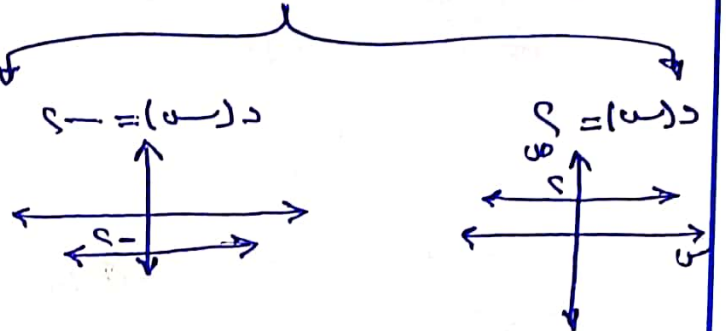
$\therefore 2أ = 2ب \quad (\div 2)$

$\therefore أ = ب$ $\therefore$ الدالة احادية

سادساً: رسم الدوال

أ) الدالة الثابتة

شكلها د(س) = م ← رقم

د: ح ← ح ، م ∈ ح وتمثل بخط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع الصادات في النقطة (٠، م)

ب) الدالة الخطية

شكلها د(س) = أس + ب

د: ح ← ح ، أ ∈ ح − {٠} ، ب ∈ ح

وتمثل بخط مستقيم مائل يقطع محور الصادات في (٠، ب) ويقطع محور السينات في النقطة (−ب/أ ، ٠)

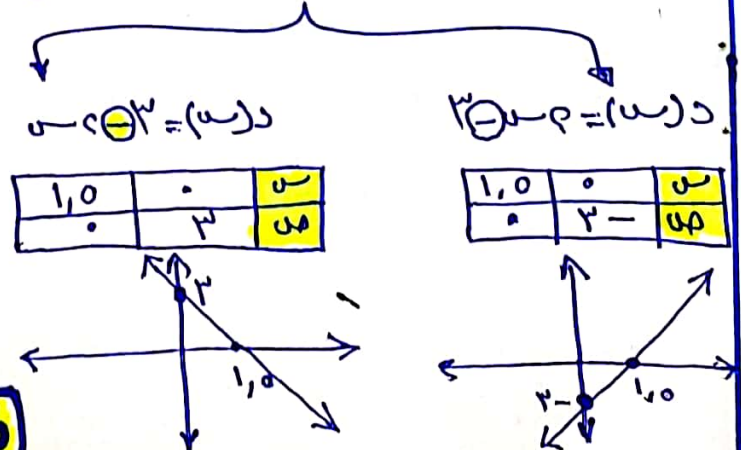
حالة خاصة

د(س) = أس هي دالة خطية تمثل بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)

د(س) = ٢س − ٣

س	٠	١,٥
ص	−٣	٠

د(س) = ٣ − ٢س

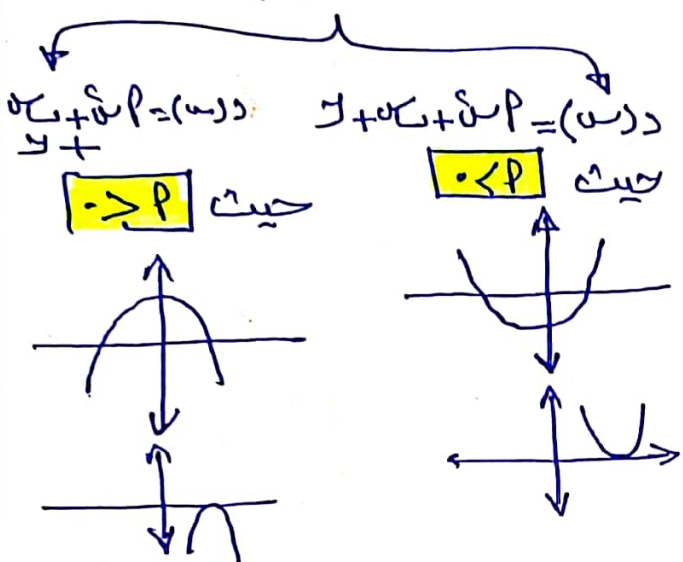
س	٠	١,٥
ص	٣	٠

ج) الدالة التربيعية

شكلها د(س) = أس² + ب س + جـ

د: ح ← ح حيث أ ∈ ح − {٠} ، ب، جـ ∈ ح

وتمثل بمنحنى نقطة رأسه هي (−ب/٢أ ، د(−ب/٢أ))

د(س) = أس² + ب س + جـ حيث أ > ٠

د(س) = أس² + ب س + جـ حيث أ < ٠

د) الصور القياسية للدوال

١) الدالة التربيعية

د(س) = س² ← رأس المنحنى لها (٠، ٠) ← شكلها

د(س) = (س + أ)² + ب ← رأسها (−أ، ب)

٢) الدالة التكعيبية

د(س) = س³ ← رأس المنحنى لها (٠، ٠) ← شكلها

د(س) = (س + أ)³ + ب ← رأسها (−أ، ب)

٢ دالة المقياس

د(س) = |س| ← رأس المنحنى لها (٠،٠) ← شكلها

• د(س) = |س + أ| + ب ← رأسها (-أ، ب) ← في الربع الأول والثاني لأنه الإشارة (+)

٣ دالة كسرية

د(س) = $\frac{1}{س}$ ← رأسها (٠،٠) ← شكلها

د(س) = $-\frac{1}{س}$ ← رأسها (٠،٠) ← شكلها

تكملة حل المعادلات

أولاً: حل معادلتين من الدرجة الأولى جبرياً في متغيرين

هناك طريقتان للحل إما بالحذف أو بالتعويض ولكن يفضل استخدام طريقة الحذف

مثال: ٢س - ص = ٥ ، س + ٣ص + ١ = ٠

الحل

٢س - ص = ٥ ← (١)

س + ٣ص = -١ ← (٢) × -٢

∴ -٢س - ٦ص = ٢ ← (٣)

بجمع (١) مع (٣)

∴ -٧ص = ٧ ⇐ ص = -١

وبالتعويض في (١)

∴ ٢س + ١ = ٥

٢س = ٤ ⇐ س = ٢

∴ م.ح = {(٢، -١)}

ثانياً: حل معادلتين في متغيرين أحدهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية

خطوات الحل:

١ من معادلة الدرجة الأولى نعبر عن أحد المتغيرين بدلالة الآخر

٢ نعوض في معادلة الدرجة الثانية ونحصل على قيمة المجهول

مثال: س - ص = ١ ، س² + ص² = ١٣

الحل

∵ س - ص = ١ ← ∴ س = ص + ١ ← (١)

بالتعويض من (١) في الدرجة الثانية

∴ (ص + ١)² + ص² = ١٣

∴ ص² + ٢ص + ١ + ص² = ١٣

∴ ٢ص² + ٢ص - ١٢ = صفر (÷٢)

∴ ص² + ص - ٦ = صفر

حل (ص - ٢)(ص + ٣) = صفر

ص = ٢	ص = -٣
من (١) س = ٣	من (١) س = -٢

∴ م.ح = {(٣، ٢)، (-٢، -٣)}

الرياضيات

الأعداد المركبة

تمهيد: حل المعادلة

$س^2 + 1 = صفر$

الحل

∵ $س^2 = -1$ بالطرفين √

$س = \pm\sqrt{-1} \notin ح$

∴ مجموعة الحل في ح = ∅

لذلك تم اللجوء إلى مجموعة حل جديدة وهي مجموعة الأعداد المركبة وهي ك

وبفرض أن $ت = \sqrt{-1}$

∴ $س = \pm ت \in ك$

∴ م.ح = {ت ، -ت}

ملاحظات هامة

• $ت = \sqrt{-1} \leftarrow ت^2 = -1$

$ت^3 = -ت \leftarrow ت^4 = 1$

حيث أن أي عدد مركب مرفوع لأس يقبل القسمة على (4) فيكون الناتج = 1

مثال: $ت^{4ن} = 1$ ، $ت^{4ن+2} = -1$

$ت^4 = ت^8 = ت^{12} = ت^{16} = ت^{20} = \dots = 1$

* $\frac{1}{ت} = \frac{ت^4}{ت} = ت^3 = -ت$

حاول بنفسك

• $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\,ت$ ، $\sqrt{-4} = 2ت$

• $\sqrt{-25} = 5ت$

العدد المركب

هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة $ع = س + ص ت$

س: جزء حقيقي ، ص: جزء تخيلي

وتسمى هذه الصورة بالصورة الجبرية

لاحظ أن

* $ع = 5$ ← عدد مركب حقيقي صرف
* $ع = 5ت$ ← عدد مركب تخيلي صرف

تساوي عددين مركبين

إذا كان $س + ص ت = أ + ب ت$

فإن:

الحقيقي = الحقيقي: $س = أ$

التخيلي = التخيلي: $ص = ب$

مثال: أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلة

$س - 2ص + (2س + ص)ت = 6 + 5ت$

الحل

حقيقي = حقيقي ، تخيلي = تخيلي

$س - 2ص = 6$ (1) | $2س + ص = 5$ ← (2)

بضرب المعادلة (2) × 2+

∴ $س - 2ص = 6$ ← (1)

$4س + 2ص = 10$ ← (3)

بالجمع

$5س = 16 \leftarrow س = \frac{16}{5}$

وبالتعويض في (1)

∴ ص = ــــــ

العمليات على الأعداد المركبة

(أ) جمع وطرح الأعداد المركبة

عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً.

مثال أوجد ناتج كل من:-

1) (٣ + ٧ت) + (٥ - ٩ت)

الحل

= (٣ + ٥) + (٧ت - ٩ت) = **٨ - ٢ت**

2) (٢ - ٤ت) - (٥ - ت)

الحل

= (٢ - ٤ت) + (-٥ + ت)

= (٢ - ٥) + (-٤ت + ت) = **-٣ - ٣ت**

نتائج هامة جداً

* (١ + ت)^{٢} = ٢ت
* (١ - ت)^{٢} = -٢ت

مثال (٣ + ٢ت)^{٢}

الحل

= ٩ + ١٢ت + ٤ت^{٢} (-٤) = **٥ + ١٢ت**

مثال (٤ + ٣ت)(٢ - ٥ت)

الحل

= ٨ - ٢٠ت + ٦ت - ١٥ت^{٢}

= **٢٣ - ١٤ت**

العددان المترافقان

العددان المركبان المترافقان هما نفس العددان ولكن يختلفان في إشارة الجزء التخيلي فقط

مثال

- مرافق ٣ + ت ← ٣ - ت
- مرافق ٣ - ت ← ٣ + ت
- مرافق ٣ت ← -٣ت
- مرافق ٣ ← ٣

ملاحظة خطيرة

ممنوع منعاً باتاً وجود ت في المقام فنتخلص من ذلك عن طريق الضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

مثال اختصر $\frac{٣}{٢ + ت}$

الحل

$\frac{٣}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت}$

$= \frac{٣(٢ - ت)}{٤ + ١} = \frac{٦ - ٣ت}{٥}$

ع = $\frac{٦}{٥}$ - $\frac{٣}{٥}$ ت

وأخيراً هناك صور أخرى للعدد المركب كالصورة المثلثية والصورة الأسية وسيتم دراستها في الصف الثالث الثانوي

المصفوفات

• المصفوفة هي ترتيب لعدد من العناصر على شكل صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين

• المصفوفة المكونة من م صفاً ، ن عموداً تكون على النظم م×ن

• عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف × الأعمدة = م × ن

بعض المصفوفات الخاصة

١ مصفوفة الصف

هي مصفوفة تتكون من صف واحد وأي عدد من الأعمدة

مثال: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

٢ مصفوفة العمود

هي مصفوفة تتكون من عمود واحد وأي عدد من الصفوف

مثال: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

٣ مصفوفة المربعة

هي المصفوفة التي فيها عدد الصفوف تساوي عدد الأعمدة

مثال: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

أو $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

٤ المصفوفة الصفرية

هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار ورمزها ▭

مثال: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

٥ المصفوفة القطرية

جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر أو أحد عناصر القطر الرئيسي لا يساوي صفر

مثال: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

٦ مصفوفة الوحدة

جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي يساوي واحد ونرمز لها بالرمز I

مثال: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

تساوي مصفوفتين

عندما يتساوى كل عنصر في المصفوفة الأولى مع نظيره في المصفوفة الأخرى بشرط أن تكون المصفوفتان على نفس النظم

مثال: أوجد قيمة س ، ص إذا كان

$$\begin{pmatrix} \text{س} & 0 & -1 \\ 5 & 2\text{ص}-3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \text{ع} \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل

ع = -١ ، س = ٢ ، ٢ص - ٣ = ٧ ، ص = ٥

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة

إذا كان ك $\begin{pmatrix} ب & أ \\ و & هـ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك ب & ك أ \\ ك و & ك هـ \end{pmatrix}$

مثال: إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٣ & ٦ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

فإن ٢أ = $\begin{pmatrix} ٦ & -٦ & ١٢ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$

مدور المصفوفة (مد)

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ب & أ \\ و & هـ \end{pmatrix}$

فإن $أ^{مد} = \begin{pmatrix} هـ & أ \\ و & ب \end{pmatrix}$

مثال: $(أ^{مد})^{مد} = أ$

المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة

إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن:-

(١) أ تسمى مصفوفة متماثلة لو $أ = أ^{مد}$

(٢) أ تسمى مصفوفة شبه متماثلة لو $أ = -أ^{مد}$

مثال: إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٨ & ٢س & ٥ \\ ٦ & -٣ & -٤ \\ ٤ & ٦ & س+ص \end{pmatrix}$ متماثلة فأوجد: س ، ص

الحل

٢س = -٤

س = -٢

س + ص = ٨

-٢ + ص = ٨

ص = ١٠

ضرب المصفوفات

شرطها: أن تكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية

مثال: إذا كان أ $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن أب = ----

الحل

أب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٣+٤ & ١٢+١٠ \\ ٤+٨ & -٥+١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢٢ \\ ١٢ & +١١ \end{pmatrix}$

المعكوس الضربي للمصفوفة

$أ^{-١} = \frac{١}{Δ} أ^{مر}$

مثال: إذا كانت أ $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ فأوجد $أ^{-١}$

الحل

$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٨ - ٣ = \boxed{٥} \neq ٠$

عكس مع

$أ^{-١} = \frac{١}{٥} \begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

$أ^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{-٣}{٥} & \frac{٤}{٥} \\ \frac{٢}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix}$

المحددات

(أولاً) محدد الرتبة الثانية

قيمة محدد الرتبة الثانية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي.

مثال

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} = (٢ \times -١) - (٤ \times ٣) = -٢ - ١٢ = \boxed{-١٤}$$

مثال

$$\begin{vmatrix} جا\theta & جتا\theta \\ -جتا\theta & جا\theta \end{vmatrix} = جا^2\theta + جتا^2\theta = \boxed{1}$$

(ثانياً) محدد الرتبة الثالثة

نفك باستخدام أي صف أو عمود ويفضل استخدام الصف أو العمود الذي يحتوي على أكثر من صفر مع مراعاة قاعدة إشارات المحدد

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثال

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & ٥ & -٢ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

الحل

$$= +٢\begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} + (-١)\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٢(٥+٤) - ٣(١+٨) - (٢-٢٠)$$

$$= ١٨ - ٢٧ + ١٨ = \boxed{٩}$$

(ثالثاً) المصفوفة المثلثية

قيمة المحدد الذي على الصورة المثلثية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

مثال

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٠ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times -٢ \times ٥ = \boxed{-٢٠}$$

مثال

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٥ & ٠ \\ ٤ & ٨ & -١ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ \times -١ = \boxed{-١٠}$$

(رابعاً) إيجاد مساحة المثلث بالمحددات

إذا كان س ص ع مثلث فيه س(أ، ب) ، ص(جـ، د) ، ع(هـ، و)

$$\text{فإن مساحة } \Delta \text{ س ص ع} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} أ & ب & 1 \\ جـ & د & 1 \\ هـ & و & 1 \end{vmatrix}$$

(خامساً) إثبات النقط على استقامة واحدة باستخدام المحددات

لإثبات أن النقط س(أ، ب) ، ص(جـ، د) ، ع(هـ، و) على استقامة واحدة

نثبت أن قيمة المحدد = صفر

وهو

$$\begin{vmatrix} أ & ب & 1 \\ جـ & د & 1 \\ هـ & و & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

المتتابعات

أولاً: المتتابعة الحسابية.

(١) شرط المتتابعة الحسابية هو أن يكون أي حد ناقص الحد السابق له يساوي مقدار ثابت ويسمى هذا المقدار الثابت بأساس المتتابعة ونرمز له بالرمز (ء)

ء = أي حد − السابق له

مثال: (٢، ٤، ٦، ٨) ← هي متتابعة حسابية منتهية حيث ء = ٤ − ٢ = ٢

مثال: (٢، ٤، ٦، ٨، ......) ← هي متتابعة حسابية غير منتهية حيث ء = ٢

(٢) الصورة العامة للمتتابعة الحسابية:

(أ، أ + ء، أ + ٢ء، ......، ل − ٢ء، ل − ء، ل)

حيث الحد الأول ح١ = أ ، الحد الأخير = ل ، الأساس ء

ح٤ = أ + ٣ء ، ح٩ = أ + ٨ء ، ......

(٣) الحد العام للمتتابعة الحسابية:

ح ن = أ + (ن − ١) ء

الحد الأول ، رتبة الحد المطلوب ، الأساس.

(٤) ملاحظات عامة على المتتابعة الحسابية

(١) لإيجاد رتبة أول حد موجب أو آخر حد موجب نضع ح ن > صفر

(٢) لإيجاد رتبة أول حد سالب أو آخر حد سالب نضع ح ن < صفر

(٣) لإيجاد رتبة الحد الذي قيمته س نضع ح ن = س

(٤) إذا كانت المتتابعة في صورة درجة أولى كانت متتابعة حسابية وأساسها هو معامل ن

(٥) لتكوين المتتابعة الحسابية يلزم إيجاد أ ، ء عن طريق حل معادلتين

(٥) قوانين مجموع المتتابعة الحسابية:

(١) إذا علم حدها الأول والأساس

ج ن = ن/٢ [٢أ + (ن − ١) ء]

حيث ن يعني عدد حدود المتتابعة

(٢) إذا علم حدها الأول والحد الأخير ل

ج ن = ن/٢ [أ + ل]

(٦) خد بالك من الكلام ده

(١) لو أعطى ج ن في صورة دالة في ن فإن ح ن = ج ن − ج ن−١

(٢) أكبر مجموع للمتتابعة = مجموع الحدود الموجبة فقط وأصغر مجموع = مجموع الحدود السالبة فقط

(٣) لإيجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع موجباً نضع ج ن > صفر

(٤) لإيجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع سالباً نضع ج ن < صفر

ثانياً: المتتابعة الهندسية

١) شرط المتتابعة الهندسية هو أن: يكون أي حد على السابق له يساوي مقدار ثابت وهذا المقدار الثابت يعرف بأساس المتتابعة الهندسية ورمزه ر

$$ر = \frac{\text{أي حد}}{\text{السابق له}}$$

مثال: (٢، ٤، ٨، ١٦) ← متتابعة هندسية منتهية حيث $ر = \frac{٤}{٢} = ٢$

مثال: (٢، ٤، ٨، .....) ← متتابعة هندسية غير منتهية حيث ر = ٢

---

٢) الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

$$(أ، أر، أر^٢، .....، \frac{ل}{ر^٢}، \frac{ل}{ر}، ل)$$

الحد الأول = أ   الأساس = ر

الحد الأخير = ل

$ح_٤ = أ ر^٣$ ، $ح_٩ = أ ر^٨$

$ح_٩$ من النهاية $= \frac{ل}{ر^٨}$ .....

---

٣) الحد العام للمتتابعة الهندسية

$$ح_ن = أ ر^{ن-١}$$

حيث ن تعبر عن رتبة الحد وليس عدد الحدود

---

٤) قوانين مجموع المتتابعة الهندسية

١) إذا علم حدها الأول والأساس

$$ج_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$$

٢) إذا علم حدها الأول وحدها الأخير

$$ج_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$$

٣) مجموع المتتابعة الهندسية إلى ما لانهاية

$$ج_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$$

شروطها: أن تكون ر كسر بسطها أصغر من مقامها.

٤) الوسط الحسابي لـ أ، ب $= \frac{أ + ب}{٢}$

أما الوسط الهندسي $= \pm \sqrt{أ ب}$

٥) الوسط الحسابي ≥ الوسط الهندسي

التباديل والتوافيق

أولاً: التباديل

١) $^نل_ر = ن(ن-١)(ن-٢) \times ..... \times (ن-ر+١)$

حيث ن ← علوي ، ر ← دليل

$$ن \geq ر$$

٢) $^نل_ر = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} = \frac{\underline{|\text{اللي فوق}}}{\underline{|\text{الفرق}}}$

٣) $^نل_٠ = ١$ ، $^نل_ن = \underline{|ن}$

٤) $\underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) \times ..... \times ٣ \times ٢ \times ١$

حيث ن ≥ صفر

خلي بالك

* $\underline{|٠} = \underline{|١} = ١$
* $ن \underline{|ن-١} = \underline{|ن}$
* $٢ك \underline{|٢ك-١} = \underline{|٢ك}$

التوافيق

(١) $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{|ر}$ لو المسألة فيها توفيقة وتبديلة لنفس الرقم والدليل

(٢) $^{ن}ق_{ر} = \frac{|ن}{|ر \; |ن-ر} = \frac{|\text{اللي فوق}}{|\text{اللي تحت} \; |\text{الفرق}}$

(٣) التبسيط

$^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

(٤) إذا كان

$^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$

إما $س = ص$ أو $س + ص = ن$

(٥) $^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$ ، $^{ن}ق_{١} = ن$.

(٦) ترتيب ن من الأشياء في صف $= |ن$

(٧) ترتيب ن من الأشياء في دائرة $= |ن-١$

(٨) عدد أقطار المضلع المحدب الذي به ن ضلع $= {}^{ن}ق_{٢} - ن$.

(٩) التباديل ⟸ هو كل ترتيب الاختيار (ر) من الأشياء من بين (ن) الأشياء

(١٠) التوافيق ⟸ هو كل المجموعات لاختيار (ر) من الأشياء من بين (ن) من الأشياء

(١١) لا معنى للحديث عن

$^{١٦}ق_{ر}$ ، $^{٦}ق_{-ر}$ ، $^{٦}ق_{٥,٥}$ ، $^{١٦}ل_{ر}$ ، .....

حيث $ن \geq ر$

الأسس هام

(١) $(٣)^{٤} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣$

(٢) عند ضرب الأساسات المتشابهة نجمع الأسس

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

(٣) عند قسمة الأساسات المتشابهة نطرح الأسس.

$س^{م} \div س^{ن} = س^{م-ن}$

(٤) $(س^{م})^{ن} = س^{من}$

(٥) $(\text{اى حاجة})^{صفر} = ١$

بشرط حاجة ≠ صفر

(٦) $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$

المعادلات الأسية

(١) إذا كان الأساس = الأساس فإن الأس = الأس

يعني اذا كان $أ^{م} = أ^{ن} \Longleftrightarrow م = ن$

(٢) ولكن إذا كان الأس = الأس لاحظ جيداً. اذا كان: $أ^{ن} = ب^{ن}$

- ن فردى: $أ = ب$
- ن زوجى: $أ = \pm ب$
- $أ \neq ب$: $ن = صفر$

(٣) إذا كان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإنه

- م فردى: $س = أ^{\frac{ن}{م}}$
- م زوجى: $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$

الفرع الثالث: حساب المثلثات

أولاً) النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة:-

في أي مثلث قائم الزاوية يكون

1) جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{أب}{أجـ}$

2) جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{ب جـ}{أ جـ}$

3) ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{أب}{ب جـ}$

ملحوظة: أي دالة × مقلوبها = 1

مثلاً: جا أ قتا أ = 1 ، ظا أ ظتا أ = 1

النسبة المثلثية \ قياس الزاوية	30°	60°	45°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

ثانياً) العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين

90°
الكل
جا قتا
180°
صفر 360°
ظا ظتا
جتا قا
270°

1) الزاويتان (180°، 360°) لا تغير شكل الدالة المثلثية ولكن نراعي الإشارة حسب الربع

فمثلاً: جا (180 + θ) = − جا θ

جا (180 − θ) = جا θ

ظا (180 + θ) = ظا θ

جتا (360 − θ) = جتا θ

قا (180 − θ) = − قا θ

2) الزاويتان (90°، 270°) تغير شكل الدالة المثلثية وكذلك أيضاً نراعي الإشارة

فمثلاً:

جا (90 − θ) = جتا θ

ظا (270 − θ) = ظتا θ

جتا (90 + θ) = − جا θ

3) الحل العام لما يأتي:-

* جا θ = جتا β

فإن $\theta \pm \beta = 90° + 360° n$

* قتا θ = قا β

فإن $\theta \pm \beta = 90° + 360° n$

* ظا θ = ظتا β

فإن $\theta + \beta = 90° + 180° n$

ثالثاً) المتطابقات المثلثية

1) $جا^2س + جتا^2س = 1$

$جا^2س = 1 - جتا^2س$ ، $جتا^2س = 1 - جا^2س$

2) $1 + ظا^2س = قا^2س$

$قا^2س - ظا^2س = 1$ ، $ظا^2س - قا^2س = -1$

3) $1 + ظتا^2س = قتا^2س$

$قتا^2س - ظتا^2س = 1$ ، $ظتا^2س - قتا^2س = -1$

رابعاً) مجموع وفرق زاويتين

1) $جا(س \pm ص) = جاس\ جتاص \pm جتاس\ جاص$

2) $جتا(س \pm ص) = جتاس\ جتاص \mp جاس\ جاص$

3) $ظا(س \pm ص) = \frac{ظاس \pm ظاص}{1 \mp ظاس\ ظاص}$

خامساً) ضعف الزاوية

1) $جا2س = 2\ جاس\ جتاس$

2) $جتا2س = جتا^2س - جا^2س = 2جتا^2س - 1 = 1 - 2جا^2س$

3) $ظا2س = \frac{2ظاس}{1 - ظا^2س}$

خد بالك: $جاس\ جتاس = \frac{1}{2} جا2س$

سادساً) القطاع الدائري

هو جزء من سطح الدائرة محدود بقوس ونصفي قطريه

محيطه = ل + 2نق

مساحة:
- → $\frac{1}{2}$ ل نق
- → $\frac{1}{2}$ هـ^ء نق²
- → $\frac{س^\circ}{360^\circ} \times \pi$ نق²

مع الحلوين: $هـ^ء = \frac{ل}{نق}$

التحويل: $\frac{س^\circ}{180^\circ} = \frac{هـ^ء}{\pi}$

$س^\circ = \frac{هـ^ء \times 180^\circ}{\pi}$ ، $هـ^ء = \frac{س^\circ \times \pi}{180^\circ}$

سابعاً) القطعة الدائرية

هو جزء من سطح الدائرة محدود بوتر وقوس.

محيطها ← ل + طول الوتر

مساحة = $\frac{1}{2}$ نق² [هـ^ء − جا هـ]

ثامناً) مساحة المضلع المنتظم

مساحة أي مضلع منتظم هو = $\frac{1}{4}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

حيث ن ← عدد الأضلاع

س ← طول الضلع

قانون الجيب

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

$$\frac{أ'}{جا أ} = \frac{ب'}{جا ب} = \frac{ج'}{جا ج} = 2نق$$

حيث نق ← نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث.

ومن خواص التناسب

$$\frac{أ'}{جا أ} = \frac{ب'}{جا ب} = \frac{ج'}{جا ج} = \frac{أ'+ب'+ج'}{جا أ+جا ب+جا ج}$$

لاحظ

تستخدم هذه القاعدة في حالة وجود زاويتان وضلع في المثلث.

قاعدة جيب التمام

(أ) في حالة وجود ضلعين وزاوية محصورة

$أ'^2 = ب'^2 + ج'^2 - 2ب'ج' جتا أ$

$ب'^2 = أ'^2 + ج'^2 - 2أ'ج' جتا ب$

$ج'^2 = أ'^2 + ب'^2 - 2أ'ب' جتا ج$

(ب) في حالة وجود ثلاث أضلاع

$جتا أ = \frac{ب'^2 + ج'^2 - أ'^2}{2ب'ج'}$

$جتا ب = \frac{أ'^2 + ج'^2 - ب'^2}{2أ'ج'}$

$جتا ج = \frac{أ'^2 + ب'^2 - ج'^2}{2أ'ب'}$

مراجعة على منهج التفاضل

أولاً: قواعد الاشتقاق

(1) إذا كانت د(س) = أ حيث أ ثابت فإن $د'(س) = صفر$

مثال

$ص = 5 \leftarrow ص' = صفر$

$ص = \pi \leftarrow ص' = صفر$

(2) إذا كانت $د(س) = أ س^{ن}$ فإن $د'(س) = ن أ س^{ن-1}$

مثال

$ص = 3س^2 \leftarrow ص' = 6س$

$ص = س^2 \leftarrow ص' = 2س$

$ص = 2س \leftarrow ص' = 2$

(3) مشتقة حاصل ضرب دالتين:

= الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

مثال

$ص = (2س+3)(س-4)$

فإن $ص' = (2س+3)(1) + (س-4)(2)$

$ص' = 2س+3+2س-8 = 4س-5$

(4) مشتقة خارج قسمة دالتين:

$$= \frac{المقام \times مشتقة البسط - البسط \times مشتقة المقام}{(المقام)^2}$$

مثال

$ص = \frac{2س+3}{س-4}$

فإن $ص' = \frac{(س-4)(2) - (2س+3)(1)}{(س-4)^2}$

$ص' = \frac{2س-8-2س-3}{(س-4)^2} = \frac{-11}{(س-4)^2}$

٥) مشتقة الجذر التربيعي :-

= $\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{٢\sqrt{\text{نفسه}}}$

مثال: ص = $\sqrt{٢س^٢ - ٤}$

فإن ص' = $\frac{٤س}{٢\sqrt{٢س^٢ - ٤}} = \frac{٢س}{\sqrt{٢س^٢ - ٤}}$

---

٦) مشتقة القوس :-

= مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس

مثال: إذا كان ص = $(٣س^٣ - ٢س^٢)^٩$

فإن ص' = $٩(٣س^٣ - ٢س^٢)^٨ \times (٩س^٢ - ٤س)$

---

٧) إذا كانت ص = د(ع) ، ع = د(س)

فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

مثال: إذا كانت ص = $٣ع^٢$ ، ع = ٥س

فإن $\frac{دص}{دس}$ = ______

الحل

$\frac{دص}{دع} = ٦ع$ ، $\frac{دع}{دس} = ٥$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٦ع \times ٥ = ٣٠ع = ٣٠ \times ٥س$

= $١٥٠س$

---

٨) مشتقة الدوال المثلثية :-

= مشتقة الدالة × مشتقة الزاوية مع ثبوت الدالة

مع تذكر أن ص = جاس ← ص' = جتاس

ص = جتاس ← ص' = −جاس

ص = ظاس ← ص' = $قا^٢س$

مثال: ص = جا$(٣س^٢ + ٢)$

ص' = (٦س) × جتا$(٣س^٢ + ٢)$

ثانياً: قواعد النهايات عند نقطة

١) التعويض المباشر يعطي عدداً حقيقياً يعبر عن النهاية أما لو أعطى الناتج $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ [كمية غير معرفة] ولكن إذا كان الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ [كمية غير محددة]

مثال: $\lim_{س \to ٤} ٨ = ٨$

$\lim_{س \to \sqrt{٢}} (س^٢ - ٤) = (\sqrt{٢})^٢ - ٤ = -٢$

$\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{٨ - س}}{س - ١} = \frac{\sqrt{٨ + ١}}{-١ - ١} = \frac{-٣}{٢}$

---

٢) استخدام التحليل في إيجاد النهاية

إذا كان ناتج التعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال: أوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

الحل

بالتعويض المباشر $\frac{(٤)^٢ - ١٦}{٤ - ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ $\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{(س - ٤)} = ٤ + ٤ = ٨$

---

٣) استخدام القسمة المطولة في إيجاد النهاية أيضاً إذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وكان المقدار يصعب تحليله

مثال: أوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ٢١س + ٢٠}{س - ٤}$

الحل

$س^٣ \ldots\ldots - ٢١س + ٢٠$ ÷ (س − ٤) = $س^٢ + ٤س - ٥$

$-(س^٣ - ٤س^٢)$

$٤س^٢ - ٢١س + ٢٠$

$-(٤س^٢ - ١٦س)$

$-٥س + ٢٠$

$-(-٥س + ٢٠)$

صفر صفر

$\lim_{س\to 4} \frac{(س-4)(س^2+4س-5)}{(س-4)}$

$= (4)^2 + 4\times 4 - 5 = \boxed{27}$

④ استخدام الضرب في المرافق في إيجاد النهاية

أيضاً إذا كان الناتج $\frac{صفر}{صفر}$ ويوجد جذر تربيعي في البسط أو في المقام أو في كليهما :-

مثال أوجد $\lim_{س\to 1} \frac{س-1}{\sqrt{3س-2}-\sqrt{س}}$

$(\frac{0}{0})$

الحل

$\lim_{س\to 1} \frac{س-1}{\sqrt{3س-2}-\sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{3س-2}+\sqrt{س}}{\sqrt{3س-2}+\sqrt{س}}$

$\lim_{س\to 1} \frac{(س-1)(\sqrt{3س-2}+\sqrt{س})}{(3س-2-س)}$

$\lim_{س\to 1} \frac{(س-1)(\sqrt{3س-2}+\sqrt{س})}{2(س-1)} = \boxed{1}$

⑤ استخدام القانون في إيجاد النهاية

إذا كان الناتج $\frac{صفر}{صفر}$ وكان المقدار مكون من حدين مرفوع الأس كبير :-

$\lim_{س\to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م}(أ)^{ن-م}$

مثال أوجد $\lim_{س\to -3} \frac{س^4-81}{س+3}$

$(\frac{0}{0})$

الحل

$\lim_{س\to -3} \frac{س^4-(-3)^4}{س-(-3)} = 4(-3)^3 = \boxed{-108}$

مثال أوجد $\lim_{س\to 6} \frac{(س-5)^6-1}{س-6}$

$(\frac{0}{0})$

الحل

$\lim_{(س-5)\to 1} \frac{(س-5)^6-1^6}{(س-5)-1}$

$= 6(1)^5 = \boxed{6}$

⑥ إيجاد نهاية الدالة عند ∞ :-

نظرية $\lim_{س\to\infty} \frac{1}{س} = صفر$

$\lim_{س\to\infty} ك = ك$

$\lim_{س\to\infty} س^2 = (\infty)^2 = \infty$

فكرة الحل

نقسم على س مرفوعة للأكبر أس في المقام

مثال $\lim_{س\to\infty} \frac{5س^2-3س+6}{2س-7س^2}$

$(\div س^2)$

الحل

$\lim_{س\to\infty} \frac{\frac{5س^2}{س^2}-\frac{3س}{س^2}+\frac{6}{س^2}}{\frac{2س}{س^2}-\frac{7س^2}{س^2}}$

$\lim_{س\to\infty} \frac{5-\frac{3}{س}+\frac{6}{س^2}}{\frac{2}{س}-7} = \boxed{\frac{-5}{7}}$

⑦ بحث وجود نهاية دالة معرفة على أكثر من قاعدة عند نقطة :-

ملحوظة يكون للدالة د نهاية عند أ إذا كانت نهايتيها من اليمين واليسار عند أ موجودتين ومتساويتين

مثال إذا كانت $د(س) = \begin{cases} 3س-1 & س < -2 \\ 4س+1 & س > -2 \end{cases}$

أوجد $\lim_{س\to -2} د(س)$

الحل

$\lim_{س\to -2^+} (4س+1) = -7 = \lim_{س\to -2^-} (3س-1)$

$د(-2^+) = \lim_{س\to -2^+} (4\times -2+1) = -8+1 = \boxed{-7}$

$د(-2^-) = \lim_{س\to -2^-} (3\times -2-1) = -6-1 = \boxed{-7}$

$\because د(-2^+) = د(-2^-)$

$\therefore$ للدالة نهاية عند $س \to -2$ وقيمتها $= -7$

(٨) كيفية بحث اتصال دالة عند نقطة أ :-

الدالة د متصلة عند س = أ إذا تحققت الآتي

- د(أ) معرفة
- الدالة لها نهاية عند س = أ
- قيمة الدالة = نهايتها

مثال: ابحث اتصال الدالة عند س = ٢

حيث د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ - ٤} & ، س \neq ٢ \\ ٢٠ & ، س = ٢ \end{cases}$

الحل

• د(٢) = **٢٠**

• د(٢⁺) = د(٢⁻) = $\lim_{س \to ٢} \dfrac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \dfrac{س^٥ - ٢^٥}{س^٢ - ٢^٢} = \dfrac{٥}{٢}(٢)^٣ =$ **٢٠**

∵ د(٢) = $\lim_{س \to ٢}$ د(س)

∴ الدالة متصلة عند س = ٢.

(٩) اتصال دالة على فترة :-

(١) الدالة كثيرة الحدود

متصلة على ح أو أي مجموعة جزئية منها

(٢) الدالة الكسرية

متصلة على ح − {أصفار المقام}

(٣) دالة المقياس

متصلة على ح أو أي فترة جزئية منها

(٤) الدوال المثلثية

• الجيب وجيب التمام متصلة على ح

• أما دالة الظل متصلة على ح − $\{س : س = \frac{\pi}{٢} + ن\pi ، ن \in ص\}$

ثالثاً: الهندسة التحليلية

(١) البعد بين نقطتين

إذا كانت أ = (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

فإن أب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

مثال: أوجد طول $\overline{أب}$ إذا كان أ(٢ ، ٣) ، ب(٥ ، ٦)

أب = $\sqrt{(٥ - ٢)^٢ + (٦ - ٣)^٢} =$ ——

ملاحظات عامة

• لمعرفة نوع المثلث من حيث أطوال أضلاعه نوجد البعد بين كل نقطتين ونقارنه

• لمعرفة نوع المثلث من حيث زواياه نوجد البعد بين كل نقطتين ثم نربع

فإذا كان

* $(أب)^٢ = (ب ج)^٢ + (أ ج)^٢$ ← قائم في ج
* $(أب)^٢ > (ب ج)^٢ + (أ ج)^٢$ ← منفرج في ج
* $(أب)^٢ < (ب ج)^٢ + (أ ج)^٢$ ← حاد في ج

(٢) إحداثي منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت أ = (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

فإن منتصف أب = $\left(\dfrac{س_١ + س_٢}{٢} ، \dfrac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

مثال: إذا كانت أ(٢ ، ٣) ، ب(٤ ، ٧)

فإن منتصف أب = $\left(\dfrac{٢ + ٤}{٢} ، \dfrac{٣ + ٧}{٢}\right)$

= (٣ ، ٥)

٣ طرق إيجاد الميل

١ بمعلومية نقطتين

الميل = فرق الصادات / فرق السينات

مثال: أوجد ميل الخط المستقيم المار بـ (٢، ٣)، (٥، −٦)

الحل

م = (−٦ − ٣) / (٥ − ٢) = −٩ / ٣ = **−٣**

٢ بمعلومية الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الميل = ظا هـ

- م (+) ← زاوية حادة
- م (−) ← منفرجة
- م = صفر ← // محور س

مثال: إذا كانت هـ = ٤٥°

∴ م = ظا ٤٥° = **١**

٣ ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة أ س + ب ص + جـ = صفر

الميل = − معامل س / معامل ص

مثال: أوجد ميل المستقيم ٥س + ٣ص − ٤ = ٠

⇐ الميل = **−٥ / ٣**

٤ ميل الخط المستقيم على الصورة ص = م س + جـ

الميل = معامل س بإشارته

لاحظ: جـ ← طول الجزء المقطوع من محور الصادات

٥ ميل المستقيم بمعلومية متجه الاتجاه

إذا كان متجه الاتجاه ى = (أ، ب)

∴ الميل = ب / أ

٤ معادلة الخط المستقيم

١ بمعلومية الميل ونقطة عليه

(ص − ص١) / (س − س١) = م

مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ٣ ويمر بالنقطة (٢، ٣)

الحل

(ص − ٣) / (س − ٢) = ٣ ⇐ ٣س − ٦ = ص − ٣

٢ بمعلومية نقطتين عليه

(ص − ص١) / (س − س١) = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١)

مثال: أوجد معادلة المستقيم المار بـ (٢، ٣)، (٥، ٦)

الحل

(ص − ٣) / (س − ٢) = (٦ − ٣) / (٥ − ٢) أكمل عادي

٣ بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

ص = م س + جـ

مثال: معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويقطع جزء طوله = ٣ وحدات من الصادات

ص = ٣س + ٣

رابعاً: الهندسة المستوية

أولاً: أنواع الزوايا

1) الزاوية الصفرية ← قياسها = صفر°
2) الزاوية الحادة ← قياسها أكبر من صفر° وأقل من 90°
3) الزاوية القائمة ← قياسها = 90°
4) الزاوية المنفرجة ← قياسها أكبر من 90° وأقل من 180°
5) الزاوية المستقيمة ← قياسها = 180°
6) الزاوية المنعكسة ← قياسها أكبر من 180° وأقل من 360°

ثانياً: العلاقة بين الزوايا

1) الزاويتان المتقابلتان بالرأس ← هما زاويتان متساويتان في القياس
2) الزاويتان المتتامتان ← مجموعهم = 90°
3) الزاويتان المتكاملتان ← مجموعهم = 180°
4) الزوايا المتجمعة حول نقطة واحدة ← مجموعهم = 360°
5) متممات الزوايا الواحدة ← متساوية في القياس
6) مكملات الزوايا الواحدة ← متساوية في القياس
7) الزاويتان المتجاورتان المتتامتان ضلعاهما متعامدان أما المتكاملتان فإن ضلعاهما على استقامة واحدة

ثالثاً: التطابق

أ) تطابق زاويتين

تتطابق الزاويتان إذا كانتا متساويتين في القياس

ب) تطابق قطعتين مستقيمتين

تتطابق القطعتان المستقيمتان إذا كانتا متساويتين في الطول

ج) حالات تطابق المثلثين

الحالة الأولى: يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان وزاوية محصورة في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر

الحالة الثانية: يتطابق المثلثان إذا تطابق زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر.

الحالة الثالثة: يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع في أحد المثلثين مع نظائره في الآخر.

الحالة الرابعة: يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر وأحد ضلعي القائمة في أحد المثلثين مع نظيرهما في المثلث الآخر

الأسطورة

رابعاً: إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن:-

1) كل زاويتان متبادلتان [شكل Z] متساويتان في القياس

مثال: ق(1) = ق(2) (بالتبادل)

2) كل زاويتان متناظرتان [شكل F] متساويتان في القياس

مثال: ق(1) = ق(2) (بالتناظر).

3) كل زاويتان متداخلتان وفي جهة واحدة من القاطع متكاملتان

مثال: ق(1) + ق(2) = 180°

قاعدة خطيرة

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية وكانت أطوال القطع الناتجة عن أحد القاطعين متساوية في الطول فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون أيضاً متساوية في الطول

مثال: أد // بهـ // جـو وكانت أب = بجـ

فإن دهـ = هـو

خامساً: قوانين المساحات والحجوم.

المثلث

محيطه: مجموع أطوال أضلاعه

مساحته:

* ½ طول القاعدة × الارتفاع ع
* ½ حاصل ضرب أي ضلعين × جا المحصورة
* $\sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-جـ)}$ [هيرون]

المربع

محيطه: مجموع أطوال أضلاعه = 4 س.

مساحته = ½ (القطر)²

= طول الضلع × نفسه = س²

المستطيل

محيطه: (الطول + العرض) × 2 = 2(س + ص)

مساحته: الطول × العرض = س × ص.

المكعب

المساحة الجانبية = 4 ل² سم²

الكلية = 6 ل² سم²

الحجم = ل³ سم³.

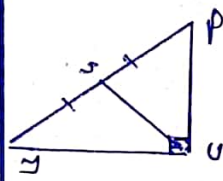
المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

الكلية = م الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

سادساً: نظريات المثلث

(أ) متوسط المثلث

- متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس
- متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة.
- نقطة تلاقي متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة ٢ : ١ من جهة الرأس.

(ب) المثلث القائم الزاوية

- طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة = $\frac{1}{2}$ طول الوتر
- طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث القائم = $\frac{1}{2}$ طول الوتر
أما طول الضلع المقابل ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ الوتر
- في Δ القائم الزاوية يعتبر الوتر هو أطول أضلاع المثلث.

(حـ) نظرية فيثاغورث

في Δ القائم الزاوية يكون مربع الوتر = مجموع مربعي الضلعين الآخرين

مثلاً:
- $(أجـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2$
- $(أب)^2 = (أجـ)^2 - (ب جـ)^2$
- $(ب جـ)^2 = (أجـ)^2 - (أب)^2$

(د) نظرية إقليدس

[شكل] عمود نازل من رأس القائمة

- $(أب)^2 = ب د \times ب جـ$
- $(أجـ)^2 = جـ د \times جـ ب$
- $(أد)^2 = ب د \times د جـ$
- $أد = \frac{أب \times أجـ}{ب جـ}$

(هـ) المثلث المتساوي الساقين

- زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متساويتان في القياس
- متوسط Δ المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة.
- المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة فإنه ينصف كل من القاعدة وزاوية الرأس
- منصف زاوية رأس Δ المتساوي الساقين يكون عمودياً على القاعدة وينصفها
- عدد محاور تماثل المتساوي الساقين = ١ أما متساوي الأضلاع = ٣ بينما مختلف الأضلاع = صفر

(و) المثلث المتساوي الأضلاع

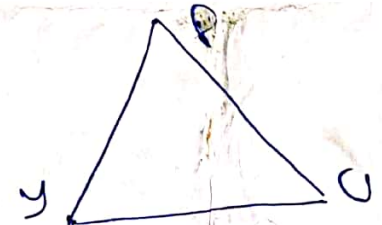
- كل زوايا المثلث المتساوي الأضلاع متطابقة وقياس كل منها = ٦٠°
- إذا تطابقت زوايا المثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع
- المثلث المتساوي الساقين الذي إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوي الأضلاع.

(ز) محور التماثل

- محور تماثل القطعة المستقيمة هو: المستقيم العمودي عليها من منتصفها
- أي نقطة تقع على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.
- محور تماثل الدائرة = عدد لانهائي بينما أي جزء من الدائرة = ١

(ح) علاقات التباين في الدائرة

متباينة المثلث

في أي مثلث يكون مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

أ ب + ب ج > أ ج

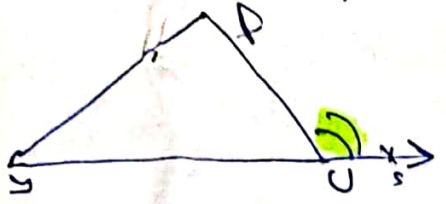
ب ج + ج أ > أ ب

أ ج + أ ب > ب ج

- قياس أي زاوية خارجة للمثلث أكبر من أي زاوية داخلة ماعدا المجاورة لها.

أي أن

ق(أ ب د) > ق(أ)

ق(أ ب د) > ق(ج)

- إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر.
- إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الأخرى.

تم بحمد الله تعالى من الانتهاء من المذكرة التأسيسية

إعداد الأستاذ / أحمد مبروك ت/__